**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

Федеральное государственное бюджетное

образовательное учреждение высшего образования

**«Ухтинский государственный технический университет»**

**(УГТУ)**

Кафедра вычислительной техники, информационных систем и технологий

**РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2**

Дисциплина: «Моделирование систем»

Шифр 191407 Группа ИСТ-2-19 Вариант 12 Курс 2

Морданов Егор Владимирович

Проверил:

доцент кафедры ВТИСиТ А. В. Семериков

Ухта

2021

СОДЕРЖАНИЕ

[Задача максимизации целевой функции 3](#_Toc69929968)

[Симплекс–метод 3](#_Toc69929969)

[Добавление нового вида продукции 11](#_Toc69929970)

[Добавление нового ограничения 12](#_Toc69929971)

[Список использованной литературы 14](#_Toc69929972)

# Задача максимизации целевой функции

Максимизировать целевую функцию при заданных ограничениях:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Симплекс–метод.

Поскольку в правой части присутствуют отрицательные значения, умножим соответствующие строки на .

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Перейдем к канонической форме.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Поскольку в уравнение была добавлена избыточная переменная, нельзя сразу получить начальное допустимое решение.

Чтобы это сделать, воспользуемся *искусственными* переменными, то есть, переменными, которые на первой итерации играют роль дополнительных остаточных переменных. На последующих итерациях от них освобождаются.

Существует два метода нахождения начального решения, которые используют искусственные переменные: -метод (метод больших штрафов) и двухэтапный метод. Воспользуемся двухэтапным методом.

Для любого равенства , в котором не содержится дополнительная остаточная переменная, введем искусственную переменную , которая далее войдет в начальное базисное решение. Решается задача ЛП минимизации суммы искусственных переменных с исходными ограничениями. Если минимальное значение этой новой целевой функции больше нуля, значит, исходная задача не имеет допустимого решения, процесс вычислений заканчивается. Если новая целевая функция равна нулю, переходим ко второму этапу.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Из уравнения (2) выражаем R1 и подставляем в новую целевую функцию r. Таким образом, получается следующая целевая функция:

Построим симплекс таблицу (Таблица 1).

Таблица 1 - симплекс-таблица

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | x1 | x2 | x3 | R1 | x4 | x5 | x6 | Решение | Отношение |
| r | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 4 |  |
| x3 | -3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 3 |
| x5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 | - |
| x6 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 5 |
| R1 | 1 | 1 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 6 | 6 |

Данное решение не оптимально и искусственно, так как в базисе содержится искусственная переменная. Определим ведущий столбец и строку. Ведущий столбец – , так как в строке у элемента наибольший по модулю коэффициент. Ведущая строка – , т.к. у нее минимальное отношение столбца решения к ведущему столбцу. Ведущий элемент равен .

Пересчитаем симплекс-таблицу с помощью метода Жордана-Гаусса и получим следующую таблицу (Таблица 2):

Таблица 2 - Симплекс-таблица

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | x1 | x2 | x3 | R1 | x4 | x5 | x6 | Решение | Отношение |
| r | -2.5 | 0 | 0.5 | 0 | -1 | 0 | 0 | 7 |  |
| x2 | -1.5 | 1 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | - |
| x5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 | 3 |
| x6 | 1.5 | 0 | -0.5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1.3 |
| R1 | 2.5 | 0 | -0.5 | 1 | -1 | 0 | 0 | 3 | 1.2 |

Полученное решение также не оптимально. Произведем еще одну итерацию. Ведущий столбец – x1, ведущая строка – R1. Результирующая симплекс-таблица будет иметь вид

Таблица 3 - симплекс-таблица

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | x1 | x2 | x3 | R1 | x4 | x5 | x6 | Решение | Отношение |
| r | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |
| x2 | 0 | 1 | 0.2 | 0.6 | -0.6 | 0 | 0 | 4.8 |  |
| x5 | 0 | 0 | 0.2 | -0.4 | 0.4 | 1 | 0 | 1.8 |  |
| x6 | 0 | 0 | -0.2 | -0.6 | 0.6 | 0 | 1 | 0.2 |  |
| x1 | 1 | 0 | -0.2 | 0.4 | -0.4 | 0 | 0 | 1.2 |  |

Теперь перепишем целевую функцию.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Подставляем в целевую функцию , выраженные из уравнений 1 и 2 соответственно.

И подставляем новую функцию в симплекс таблицу (Таблица 4), за место функции r.

Таблица 4 - симплекс-таблица

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | Решение | Отношение |
| z | 0 | 0 | 0 | -2 | 0 | 0 | 12 |  |
| x2 | 0 | 1 | 0.2 | -0.6 | 0 | 0 | 4.8 |  |
| x5 | 0 | 0 | 0.2 | 0.4 | 1 | 0 | 1.8 |  |
| x6 | 0 | 0 | -0.2 | 0.6 | 0 | 1 | 0.2 |  |
| x1 | 1 | 0 | -0.2 | -0.4 | 0 | 0 | 1.2 |  |

Полученное решение также не оптимально. Произведем еще одну итерацию. Ведущий столбец – x4, ведущая строка – х6. Результирующая симплекс-таблица будет иметь вид (Таблица 5).

Таблица 5 - симплекс-таблица

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | Решение | Отношение |
| z | 0 | 0 | -0.66667 | 0 | 0 | 3.333333 | 12.66667 |  |
| x2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 |  |
| x5 | 0 | 0 | 0.333333 | 0 | 1 | -0.66667 | 1.666667 |  |
| x4 | 0 | 0 | -0.33333 | 1 | 0 | 1.666667 | 0.333333 |  |
| x1 | 1 | 0 | -0.33333 | 0 | 0 | 0.666667 | 1.333333 |  |

Полученное решение также не оптимально. Произведем еще одну итерацию. Ведущий столбец – x4, ведущая строка – х6. Результирующая симплекс-таблица будет иметь вид (Таблица 6).

Таблица 6 - Итоговая симплекс-таблица

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | Решение |
| z | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 16 |
| x2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 |
| x3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 | -2 | 4 |
| x4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 3 |
| x1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 |

Полученное решение является допустимым и оптимальным, так как в F-уравнении ни одна из переменных не имеет отрицательных коэффициентов, и все решения неотрицательны

Данная таблица показывает, что:

1. *Оптимальное решение:*

|  |  |
| --- | --- |
| z | 16 |
| x1 | 3 |
| x2 | 5 |

1. *Чувствительность оптимального решения на изменение правых частей (первая задача на чувствительность)*:

Чтобы определить вышеуказанный интервал, необходимо выполнить ряд дополнительных вычислений. Положим, это запас ресурса (3) стал 3 + Δ2. Поскольку правые части не используются в качестве ведущих элементов, то Δ2 в симплекс-таблице будет оказывать влияние на каждой итерации только на правые части ограничений. После пересчета задачи с новым значением ресурса (2) получаем:

|  |  |
| --- | --- |
| F |  |
| X1 |  | (1) |
| X2 |  | (2) |
| X3 |  | (3) |
| X4 |  | (4) |

Из таблицы видно, что правая часть представляет собой сумму двух величин: постоянной и линейно зависящей от Δ2.

Постоянные соответствуют числам, которые фигурируют в правых частях ограничений до введения Δ2.

Коэффициенты во втором слагаемом равны коэффициентам при x4, так как только она связана со вторым ограничением.

Значение Δ2 определяется из условия не отрицательности правых частей ограничений в результирующей симплекс-таблице.

Для определения допустимого интервала значений рассмотрим два случая:

Все соотношения выполняются в любом случае.

Все соотношения выполняются при .

Объединяя результаты вычислений для ресурса (3), получим уменьшение запаса ресурса (3) более чем на 5/3 и увеличение более чем на 1.

Изменение запаса ресурса (3) будет равно:

Таким же образом находятся границы изменения ресурса (4). Положим, что запас ресурса (4) стал 3 + Δ4

|  |  |
| --- | --- |
| F |  |
| X1 |  | (1) |
| X2 |  | (2) |
| X3 |  | (3) |
| X4 |  | (4) |

Для определения допустимого интервала значений рассмотрим два случая:

Соотношения (1) (2) и (4) выполняются в любом случае, соотношение (3) справедливо только при , таким образом, все соотношения выполняются при

Соотношение (3) всегда выполняется, соотношения (1) (2) и (4) выполняются при

Объединяя результаты вычислений для ресурса (3), получим уменьшение запаса ресурса (3) более чем на и увеличение более чем на .

Изменение запаса ресурса (3) будет равно:

1. *Ценность каждого ресурса (вторая задача на чувствительность).* Из симплекс-таблицы легко увидеть ценность каждого ресурса: Y1 = 0, Y2 = , Y3 = , Y4 = 2, что соответствует ценностям ресурсов, полученным с помощью графического решения.
2. *Чувствительность оптимального решения на изменение коэффициентов целевой функции (третья задача на чувствительность)*:

Чтобы показать какие изменения происходят в симплекс-таблице при колебании удельной прибыли, число 2 (коэффициент первого слагаемого в F уравнении) примем равное (2+δ1).

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | Решение |
| F | 0 | 0 | 0 |  |  | 0 |  |

Коэффициенты у небазисных переменных при оптимальном решении в F- уравнении , так как решается задача максимизации.

Таким образом,

Аналогично определяется C2.

Число 2 (коэффициент второго слагаемого в F уравнении) примем равное (-1+δ2).

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | Решение |
| F | 0 | 0 | 0 |  |  | 0 |  |

Коэффициенты у небазисных переменных при оптимальном решении в F-уравнении , так как решается задача максимизации.

Таким образом,

При этих δ1 и δ2 оптимальные значения переменных остаются постоянными, а оптимальное значение F уравнения изменяется.

## Добавление нового вида продукции

Обозначим через d3 объем производства новой продукции и найдем новое решение и сделаем вывод о целесообразности выпуска новой продукции.

максимизировать целевую функцию

F = 2x1 + 2x2 + 2d3

при ограничениях:

|  |  |
| --- | --- |
| 3x1 - 2x2 - d3 ≤ -6  x1 + x2 + 2d3 ≥ 4  x1 + d3 ≤ 3  x2 – 2d3≥ 5  x1, x2, d3≥ 0 | (1)  (2)  (3)  (4) |

Зная ценности ресурсов (Y1, Y2, Y3, Y4) = (0, 0, 2, 2), вычисляем приведенную стоимость для переменной *d3:*

Z3 – C3 = -Y1 + 2Y2 + Y3 – 2Y4 – 2 = –4

Таким образом, введение нового вида продукции приводит к неоптимальному текущему решению. (число (–4) является значением коэффициента у небазисной переменной х3 в рассматриваемой задаче на максимизацию). Это значит, что получившееся текущее неоптимальное решение надо привести к оптимальному решению.

Чтобы найти новое оптимальное решение, сначала вычислим в текущей симплекс-таблице столбец коэффициентов ограничений, соответствующий переменной d3. Для вычислений используем обратную матрицу, столбцы которой ассоциируются со столбцами начальных базисных переменных x3, x4 x5, x6.

Отсюда следует, что текущая симплекс-таблица должна быть приведена к следующему виду (добавлен столбец d3) (Таблица 7).

Таблица 7 - симплекс-таблица

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | X1 | X2 | D3 | X3 | X4 | X5 | X6 | Решение |
| F | 0 | 0 | -4 | 0 | 0 | 2 | 2 | 16 |
| X1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 |
| X2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 |
| X3 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | 3 | -2 | 5 |
| X4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 |

После пересчета, как в симплекс-методе, получаем следующую симплекс-таблицу (Таблица 8):

Таблица 8 - симплекс-таблица

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | X1 | X2 | D3 | Х3 | X4 | X5 | X6 | Решение |
| F | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 6 | 6 | 24 |
| X1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 |
| X2 | 0 | 1 | -2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 |
| X3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 5 | 0 | 9 |
| X4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 |

Введение нового вида продукции привело к нарушению оптимальности. Целевая функция увеличилась на (24 – 16) = 8. Увеличение целевой функции указывает на целесообразность выпуска нового выпуска продукции.

## Добавление нового ограничения

Добавление нового ограничения в существующую модель ЛП может привести к одной из следующих ситуаций:

1. Новое ограничение является избыточным. Это означает, что новое ограничение выполняется при текущем оптимальном решении.
2. Новое ограничение не выполняется при текущем оптимальном решении. В этом случае применить двойственный симплекс- метод, чтобы получить (или хотя бы попытаться получить) новое оптимальное решение.

Введём в нашу задачу новое ограничение . Данное условие соответствует пункту 1.

Запишем новое ограничение в стандартной форме:

x1 - x7 = 1

В текущем решении x1 - базисная переменная, поэтому её надо выразить через небазисные.

х1 + x5 = 3,

x1= 3- x5,

x5 + x7 = 2

В результате получим новую симплекс-таблицу (Таблица 9).

Таблица 9 - симплекс-таблица

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | Реш. |
| F | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 16 |
| X1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| X2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| X3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 | -2 | 0 | 5 |
| X4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 |
| X7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 |

Полученная таблица соответствует оптимальному и допустимому решению. Таким образом, введение нового ограничения не повлияло на решение задачи.

# Список использованной литературы

1. Семериков А. В. Решение задач линейного программирования [Текст]: учебное пособие / А.В. Семериков. – Ухта: УГТУ, 2013. – 67 с.